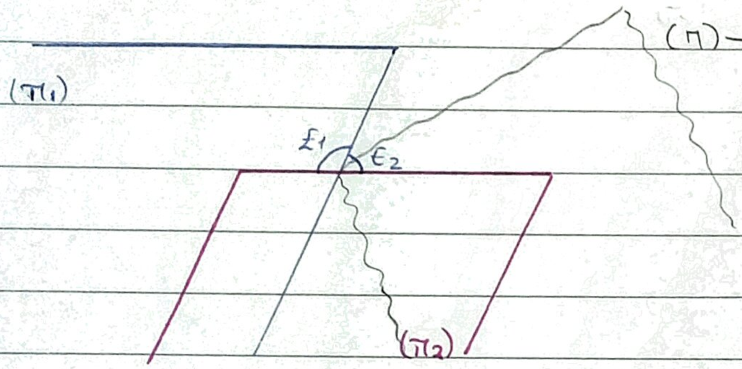
Μαθημα 13ο

5/4/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Εφαρμογη

("διχοτομουν επιπεδο") (το επιπεδο που διχοτομει τη γωνια δυο επιπεδων)



$(\pi) \rightarrow$ Εστω $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ το (π) ως "διχοτομος" τα σημεια που ισαπεχουν απο τα επιπεδα (π_1), (π_2)

$$d(P_0, \pi_1) = d(P_0, \pi_2) \Rightarrow \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1 z_0 + \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \pm \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2 z_0 + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

με $(\pi_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$ και $(\pi_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$

Παραδειγμα

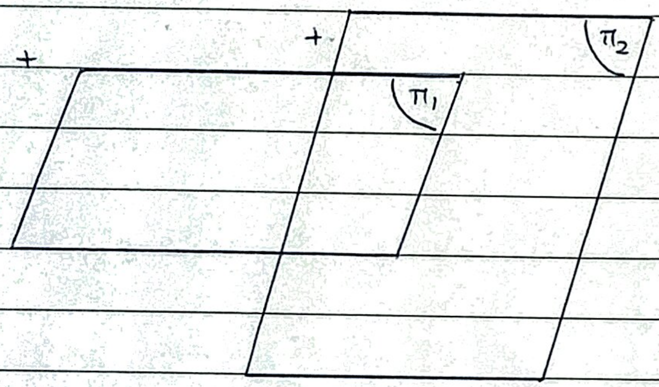
(1) Δινονται τα επιπεδα $(\pi_1): x + 2y + 3z - 4 = 0$ και $(\pi_2): 5x + z = 3$. Να βρεθουν οι/η εξισωσεις/η του διχ. επιπεδου

Προφανως $\frac{1}{5} \neq \frac{3}{1}$ $\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\right) \Rightarrow$ το επιπεδο τεμνονται $\Rightarrow$ σχημ. γωνια

θελουμε εξ. επιπεδου που διχοτομει αυτη τη γωνια (π)

Εστω $P(x, y, z) \in (\pi) \Rightarrow \frac{1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + (-4)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \pm \frac{5x + 0y + 1z - 3}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2}}$

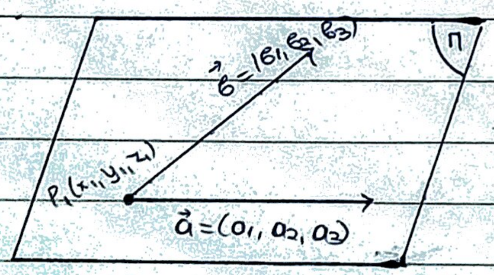
(2) Να βρεθει η εξ. επιπεδου (π) που διχοτομει τη διεδρη γωνια των $(\pi_1): x+2y-3z-1=0$, $(\pi_2): 2x+y-z+3=0$ και μεσα στην οποια βρισκεται το σημειο $P_1(1,1,1)$



Παρατηρουμε οτι με αντικατασταση στο (π_1) (το σημειο P_1):
$1+2\cdot 1-3\cdot 1-1=-1<0$ αρα το P_1 ανηκει στον αρνητικο ημιχωρο του (π_1)
Ομοιως $2\cdot 1+1-1+3=5>0$ αρα το P_1 ανηκει στον θετικο ημιχωρο του (π_2)
$\Rightarrow$ Η ζητουμενη εξισωση ειναι $d(P,\pi_1)=-d(P,\pi_2)$, οπου $P(x,y,z)$

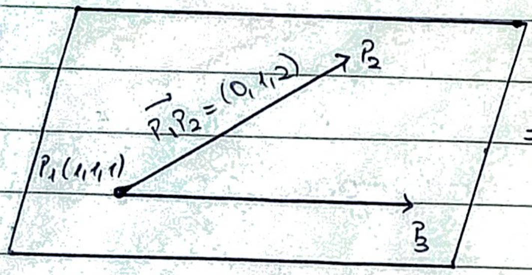
$$\Rightarrow \frac{1\cdot x+2y+(-3)z-1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=-\frac{2x+y-z+3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$$

(3) Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$ και $P_3(1,3,3)$



$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

Αρκει τα $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικα



⇒ Προφανώς τα $\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}$ μη συγγραμ. (δηλ. Γρ. Ανεξ.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \exists \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad (*)$$

Άρα $r(A)=2$ = # γραμ. ανεξ.

(*) Έχω μια ορίζουσα $2\times 2 \neq 0$ άρα $r(A)=2$ συνεπώς Γρ. Ανεξ.
Αν έχω 3 διανύσματα θέλω $3\times 3 \neq 0$
Αν έχω 4 διανύσματα θέλω $4\times 4 \neq 0$
} δηλ. μέγιστη ορίζουσα $\neq 0$

$$\Rightarrow (\pi) \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$

(4) Να βρεθεί η τομή τριών επιπέδων

$$(\Sigma) \begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \\ \pi_3: A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = 0 \end{cases}$$

Τα π_1, π_2, π_3 έχουν μοναδικό σημείο τομής $\Leftrightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow r(A) = r(A|B) = 3 \Leftrightarrow \det \Sigma \neq 0$

με $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$ και $A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & -\Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & -\Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & -\Delta_3 \end{array}\right]$

$r(A) = r(A|B) = 1$

$\exists$ στον A στοιχείο $\neq 0$ και όλες οι 2×2 ορίζουσες $=0$

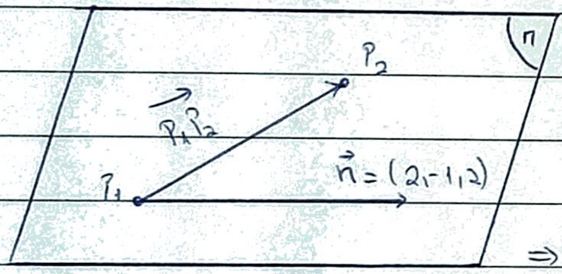
$\Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} \Leftrightarrow$ τα π_1, π_2, π_3 συμπίπτουν

! Αν $r(A)=1$, $r(A|B)=2$ $\Rightarrow$ $\exists$ ορίζουσα 2×2 $\begin{vmatrix} A_1 & -\Delta_1 \\ A_2 & -\Delta_2 \end{vmatrix}$ ή ... $=0$

δηλ $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ τότε τα επίπεδα που είναι παράλληλα.

(5) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίο διέρχεται από $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,-3,1)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $(\pi_1): 2x-y+2z-20=0$

$\vec{n}=(2,-1,2) \perp (\pi_1)$



$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-2, -3-0, 1-0) = (-2,-3,1)$

$\Rightarrow$ το $\pi \perp \pi_1$ $\Rightarrow$ το $\vec{n} \parallel \pi$ αφού $n \perp (\pi_1)$

Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow$ αυτά είναι Γ.Α

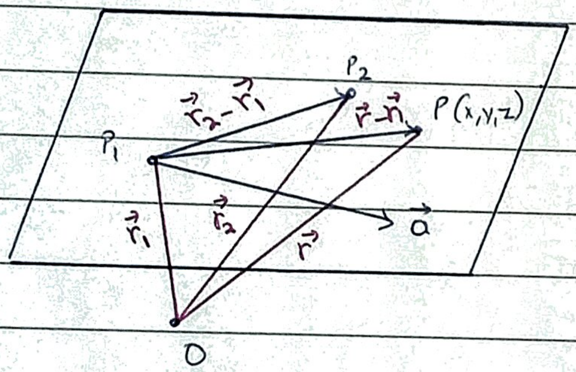
άρα μη συγγραμμικά

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5x+6y+8z+10=0$$

$\{ \pi_1 \perp \pi_2 \iff |A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2| = 0 \}$

(*) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση επιπέδου η οποία διέρχεται από $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ και $\vec{a} \parallel \pi$ $(\vec{a}=(a_1,a_2,a_3))$

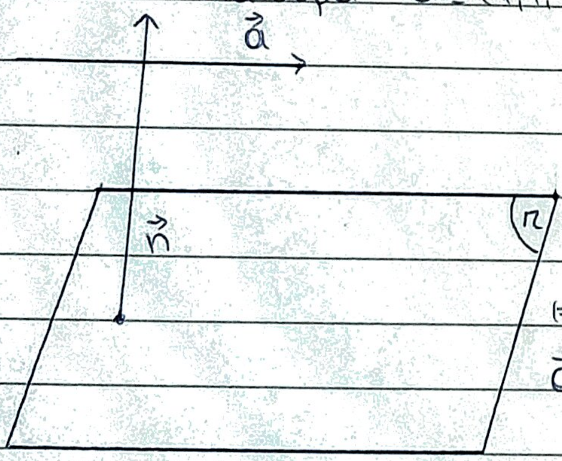
$$\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \to \vec{r}-\vec{r_1} \\ \to \vec{r_2}-\vec{r_1} \\ \to \vec{a} \end{array}$$



Είναι συνεπίπεδα $\iff$ $(\vec{r}-\vec{r_1}, \vec{r_2}-\vec{r_1}, \vec{a})=0$
↳ μεικτό γινόμενο

(6) Ν.δ.ο το διάνυσμα $\vec{a}=(1,1,2)$ είναι παράλληλο στο $(\pi): 3x-3y+11=0$

$\vec{n}=(3,-3,0) \perp (\pi)$



το $\vec{a} \parallel (\pi) \iff \vec{a} \perp \vec{n}=(3,-3,0)$
$\iff \vec{a}\cdot\vec{n}=0$ Άρα παρατηρούμε ότι
$\vec{a}\cdot\vec{n} = 1\cdot3+1(-3)+2\cdot0=0$

(7) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίο είναι παράλληλο προς το $2x-y+z-12=0$ και διέρχεται από το $P(1,-1,1)$, $\vec{n}=(2,-1,1)\perp(\pi)$

1^{os} τρόπος

Έστω (π) το ζητούμενο επίπεδο. Αφού $(\pi)\parallel(\pi') \Rightarrow \underbrace{\vec{n}}_{(2,-1,1)}\perp(\pi)$

Γνωρίζουμε ότι για ένα επίπεδο ξέρουμε $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $(\pi)\perp\vec{n}=(A,B,\Gamma)$
$\Rightarrow$ η εξίσωση (π): $A(x-x_1)+B(y-y_1)+\Gamma(z-z_1)=0$

Άρα το (π): $2(x-1)+(-1)(y-(-1))+1(z-1)=0$

2^{os} τρόπος

$(\pi)\parallel(\pi') \Rightarrow$ άρα το (π) έχει εξίσωση της μορφής
$2x-y+z+\Delta=0$

Αφού το $P\in$ στο επίπεδο $\Rightarrow$ επαληθεύει $\Rightarrow 2\cdot 1-(-1)+1+\Delta=0 \Rightarrow \Delta=4$

Συνεπώς (π): $2x-y+z-4=0$